

# Termodinamiko/Leciono 2

---

## Termodinamiko

La scienca faka instruo pritraktanta la aliiĝojn kaj ŝanĝojn de diversaj energispecoj en la varmenergion kaj reen, same kiel aperaĵojn kunligitajn kaj interrilatantajn al ĉi tiuj procezoj, estas nomata termodinamiko. Ĝi apogas sin sur du fundamentaj teoremoj:

- 1) Sur la unua termodinamika teoremo, kiu metas egalsignon inter la laboro kaj la varmo
- 2) Sur la dua termodinamika teoremo, kiu pritraktas kondiĉojn, dum kiuj la varmo ŝanĝiĝas en aliajn specojn de energio.

### La unua teoremo termodinamika

La unua termodinamika teoremo esprimas la principon pri la konservado de energio. La varmo estas la speco de energio kaj tial post ĉiu ŝanĝo de la varmo en la laboron egalas la malgajno de la varmo al la gajnita laboro.

(Nuntempe kaj la varmo kaj la laboro mezuriĝas en J. Pli frue por ĉi tiu samvaloreco validis la sekvaj rilatoj:

$$1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$$

$$1 \text{ kcal} = 4186,8 \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 0,2389 \text{ cal}$$

$$1 \text{ kJ} = 0,2389 \text{ kcal}$$

Post la mala ŝanĝo la ekestinta varmo egalas al la pereigita laboro aŭ al la malgajno de iu alia energispeco. Matematike oni povas ĉi tiun teoremon esprimi jene:

$$U - U_0 = Q + A$$

$U_0$  – la komenca ena energio, J

$U$  – la fina ena energio, J

$Q$  – la aldonita varmo, J

$A$  – la aldonita laboro, J

La diferenco de enaj energioj  $U - U_0$  estas indikita en [J]

La ena energio estas la funkcio de stataj grandoj, kaj ĝi mem estas la stata granda. Tial la entuta sumo de eldonita aŭ aldonita varmo kaj laboro estas en rilato nur al la komenca kaj al la fina statoj de la ena energio. Ĝi tute ne dependas de maniero, laŭ kiu la ŝanĝo inter ambaŭ statoj okazis.

Kiam estas la diferenco  $U - U_0 = 0$  tiam ŝanĝos la tuta varmo en la laboron, aŭ male – la tuta laboro en la varmon. Tio estas la ekstrema kazo.

La valideco de  $Q = -A$ , kiam estas  $U - U_0 = 0$ , aŭ memkompreneble la valideco de la ekvacio  $U - U_0 = Q + A$  harmonias kun la realeco kaj tiel ankaŭ kun la principo pri la energikonservo. Ĝi samtempe neas la eblecon de gajno de iu ajn energispeco senfonte aŭ senkompenca. Tiel estas ankaŭ la ebleco de “perpetuum mobile” (senĉesa moviĝanta aparato – senĉesa moviĝilo).

— ● —

Oni povas la ekvacion esprimantan rilaton inter grandoj laŭ la unua termodinamika teoremo skribi ankaŭ jene:

(46a)

$$dQ = dU + dA$$

aŭ por la multo da 1 kg:

(46b)

$$dq = du + da$$


---

+ du – la pligrandiĝo de la ena energio - du – la plimalgrandiĝo de la ena energio.

La ena energio konsistas de la ena kinetika energio kaj de ena potenciala energio.

La ena kinetika energio estas la kinetika energio de molekuloj de la gaso kiuj estas en daŭra proceda kaj rotacia movado, kaj la kinetika energio de la atomoj, kiuj oscilas. Ĝi dependas de la stato de gaso difinita per la premo kaj temperaturo.

La ena potenciala energio estas difinita per koheraj fortoj inter la molekuloj kaj atomoj. Ankaŭ ĝi dependas de la stato de gaso kaj precipe de la specifa volumeno dum la certa kaj donita temperaturo.

Tial estas:

(47)

$$du = du_p + du_k$$

$u_p$  – la ena potenciala energio

$u_k$  – la ena kinetika energio

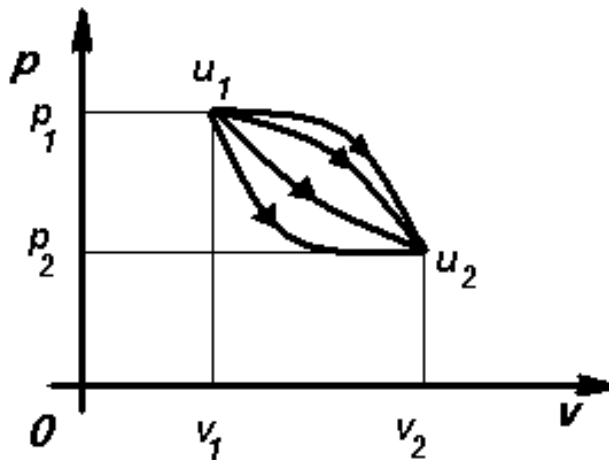
Por la ideala gaso estas  $du_p = 0$ , ĉar la difino de ideala gaso ne konsideras iujn ajn koherajn fortojn inter elementaj maseroj.

Do, la ena energio estas la funkcio de stataj grandoj:

(48)

$$u = f(p, v, T)$$

Tial ĝi mem estas la stata granda ne dependanta de la karaktero de stata aliĝo.



La sama validas por la diferenco  $u_2 - u_1$ .

El tri fundamentaj stataj grandoj p,v, T estas du nedepende ŝanĝeblaj. Tiel la enan energion u difinas unu el tri sekvaj ekvaciaj rilatoj:

(49)

$$u = f_1(p, v)$$

$$u = f_2(v, T)$$

$$u = f_3(p, T)$$

El dependeco de la ena energio al la stataj grandoj rezultas, ke "du" estas totala diferenciale:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_p dv$$

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_p dv$$

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_T dp$$

La rilatoj esence plisimpliĝos por idealaj gasoj. Por ili  $du_p = 0$ , koherajn fortojn inter la molekuloj oni ne supozas. Oni konsideras la volumenon de molekuloj kiel nulan, kaj tial la premo dum la konstanta volumeno dependas nur de la temperaturo.

El tri stataj grandoj restas nur unu sendepende ŝanĝigebla – kaj tio estas la temperaturo. La ekvacioj (48) plisimpliĝas jene:

51)

$$u = f(T)$$

En la kazo, kiam oni alkondukas la varmon  $dq$  dum la konstanta volumeno ( $v=\text{konst}$ ), tiam  $da = p \cdot dv = 0$ , kaj la tuta varmo transformiĝas en la plialtigo de la ena energio.

Por la ideala gaso validas:

$$v = \text{konst}$$

$$u_0 = 0$$

$$dv = 0$$

$$dq = du$$

$$dq = c_v dT$$

(52)

$$q_{1,2} = \Delta u = c_v(T_2 - T_1) = c_v(t_2 - t_1)$$

La ŝanĝiĝo de la ena energio egalas al la varmo, kiun oni alkondukas al la ideala gaso dum ĝia konstanta volumeno, plivarmiginte ĝin en temperatura intervalo  $\Delta t$ .

La rilato plisimpliĝas post la elekto de la eka temperaturo je  $0^\circ\text{C}$  jene:

$$v = \text{konst}$$

$$t_0 = 0$$

$$u_0 = 0$$

(53)

$$u - u_0 = c_v(t_2 - t_1)$$

$$u = c_v t$$

Kaj tiam la ekvacio (46b) ricevas la formon:

$$dq = du + da$$

$$dq = 0$$

$$da = -du$$

$$du + da = 0$$

(54)

$$a_{1,2} = u_1 - u_2$$

— ● —

La fundamenta ekvacio esprimanta la unuan termodinamikan teoremon (46b)

$$dq = du + da$$

povas havi ĉi tiun formon:

(55)

$$dq = du + pdv$$

aŭ

(55a)

$$dq = c_v dT + pdv$$

Sed ĝi povas havi ankoraŭ unu formon, kiam oni anstataŭas en la ekvacio (55a) la produkton  $p \cdot dv$  el la diferencigita stata ekvacio

$$pv = rT$$

$$pdv + vdT = r dT$$

$$dq = c_v dT + r dT - v dp$$

$$pdv = r dT - v dp$$

kaj oni ricevas:

(56)

$$dq = c_p dT - v dp$$

— ● —

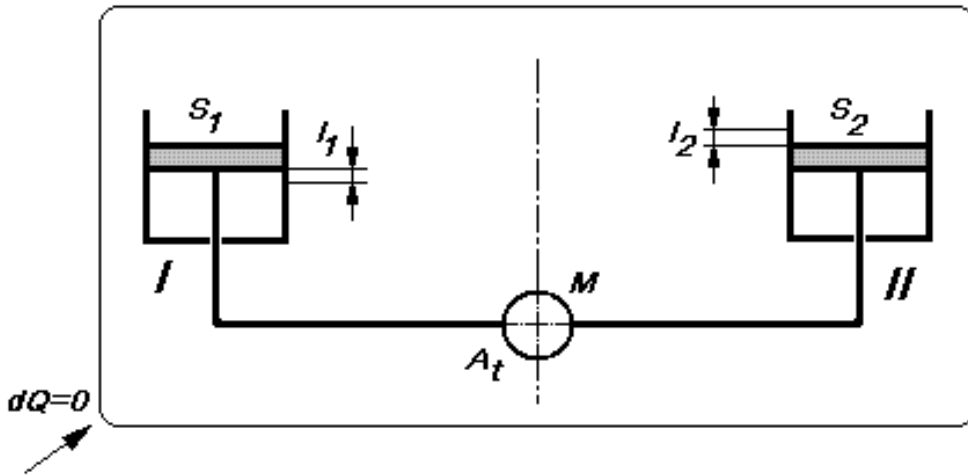
La unuan termodinamikan teoremon oni povas formuli kelkmaniere. Ĉiu formulo esprimas ian apartan econ de la leĝo pri la energikonservado. Oni uzas plej ofte ĉi tiujn formulojn:

- 1) La varmo kaj la laboro estas reciproke samvaloraj (ekvivalalentaj).
- 2) La energio de izolita sistemo estas konstanta kaj dum tempo neŝanĝema.
- 3) La varmo alkondukita al la izolita sistemo egalas al la plialtigo de ena energio kaj de volumena laboro, efektivita per ĉi tiu sistemo.
- 4) La konstruo de "perpetuum mobile" (senĉesa moviĝilo) de unua ordo ne estas ebla. Oni ne povas konstrui maŝinon kiu kapablas plimultiigi energion de izolita sistemo.
- 5) "du" estas la totala diferenciale de la ena energio.

— ● —

**Entalpio**

En varmaŝinoj oni gajnas daŭre laboron el enkondukita labormaterio. Tio okazas ekzemple en varmturbinoj el vaporo aŭ el bruligaĵoj.



estu du provizuroj kunligitaj tra motoro  $M$  unu kun la alia. En la ujoj estas piŝtoj kun areoj  $S_1$  kaj  $S_2$ .

En la provizuro I. estas labormaterio havanta premon  $p_1$  kaj temperaturon  $T_1$ . Ĝi estas alkondukata en la motoron  $M$  por ĉi tie efektiviĝi la laboron  $A_t$ . Ĝi enfluas poste la provizuron II., kie daŭre estas la premo  $p_2$  kaj la temperaturo  $T_2$ . La tuta sistemo estas izolita kontraŭ la ĉirkaŭaĵo. Tial la varmperdoj estas  $dQ = 0$ . Kiam la motoron trafluas 1 kg da labormaterio, tiam ŝoviĝas la piŝto de areo  $S_1$  en la provizuro I. je la varmdimensio  $I_1$  en la motoro  $M$  efektiviĝas la laboro  $A_t$  kaj en la provizuro II. ŝovoĝas la piŝto de areo  $S_2$  je vojdimensio  $I_2$ .

Laŭ la leĝo pri la energikonserlado estas la ŝanĝo de ena energio en ĉi tiu izolita sistemo egala al la sumo de alkondukitaj energioj. (Ĝi estas nulo.) Dum ĉiu laborprocezo oni devas aldoni novan labormaterion  $m$  en la provizuron I. Ĉi tio okazas kontraŭ la premo  $p_1$ , kiu daŭre estas en la provizuro I. Tiel oni aldonas la laboron  $S_2 p_2 I_2 = p_2 V_2$ . Ĉiuj ŝanĝoj en ĉi tiu izolita sistemo povas realigi nur malprofite de la ena energio de la sistemo. Tial validas la sekvaj rilatoj:

(57)

$$U_1 - U_2 = A_t + p_2 V_2 - p_1 V_1$$

(58a)

$$A_t = (U_1 + p_1 V_1) - (U_2 + p_2 V_2)$$

(58b)

$$A_t = (J_1 - J_2)$$

La sumo en la krampeto estas:

(59)

$$J = U + pV$$

kaj por 1 kg da labormaterio:

(60)

$$i = u + pV$$

Oni nomas ĉi tiun grandon – entalpio.

Unu kilogramo da gaso efektiviĝas en la motoro  $M$  ĉi tiun teknikan laboron:

(61)

$$a_t = i_1 - i_2$$

$i_1$  – entalpio de labormaterio ĉe la eniro de motoro, kJ/kg

$i_2$  – entalpio de labormaterio ĉe la eliro de motoro, kJ/kg

La efektivigita teknika laboro egalas al la diferenco de la entalpioj de la entalpioj de labormaterioj inter komenco kaj fino de laborprocezo en varmaŝino.

La laboro tiamaniere gajnita estas ankaŭ nomata la daŭra laboro, ĉar ĝi povas esti daŭre gajnata el al maŝino, kiam oni aldonas al ĝi novajn kvantojn da labormaterio. Kontraŭe, la volumena laboro:

$$a_{1,2} = (u_1 - u_2)$$

estas gajnita nur unufoje malprofite de la ena energio. La entalpio dependas de la ena energio  $u$  kaj de la produkto  $p \cdot v$ . Ambaŭ valoroj de la produkto estas stataj funkcioj. Tiel ankaŭ la aliigo de entalpio ne dependas de la vojo de procezo, sed nur de la komenca kaj fina statoj de labormaterio, kiu estas difinita de stataj grandoj –  $p, v, T$  (fundamentaj stataj grandoj), eventuale  $u$ . La aliigo de entalpio du estas la totala diferencialo. Por ĝi validas similaj kiel por  $u$ .

$$i = f_1(p, v)$$

$$i = f_2(v, T)$$

$$i = f_3(p, T)$$

$$di = \left( \frac{\partial i}{\partial p} \right)_v dp + \left( \frac{\partial i}{\partial v} \right)_p dv$$

$$di = \left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial i}{\partial v} \right)_p dv$$

$$di = \left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp$$

Kiam oni anstataŭigas la valoron  $di$  el la derivita  $i = u + pv$  en la ekvacion de la unua termodinamika teoremo (55)

$$dq = du + pdv$$

estas post la anstataŭigo:

$$di = du + pdv + vdp$$

$$di - vdp = du + pdv$$

(63)

$$dq = di - vdp$$

kaj post la integrado:

(63a)

$$q_{1,2} = i_2 - i_1 - \int_{p_1}^{p_2} v dp$$

Post la komparo de la ekvacioj (63) kaj (56)

(63)

$$dq = di - vdp$$

(56)

$$dq = c_p dT - vdp$$

resultas la sekva ekvacio:

(64)

$$di = c_p dT$$

Kiam oni aldonas la varmon al la ideala gaso dum la konstanta premo, la ekvacio (63) plisimpliĝas jene:

$$p = konst$$

$$dp = 0$$

$$dq = di - vdp$$

$$dq = di = c_p dT$$

(65)

$$q_{1,2} = i_2 - i_1 = c_p(T_2 - T_1) = c_p(t_2 - t_1)$$

Do, la entalpio estas la varmo aldonita al 1 kg da ideala gaso dum la konstanta premo por la varmigo ek de la temperaturo  $T_1$  al la temperaturo  $T_2$ . Oni kutime elektas kiel fundamentan kaj ekan entalpion la entalpion apartenantan el la temperaturo  $0^\circ\text{C}$  kaj al la premo 1 bar. Oni ne bezonas koni la absolutan entalpion. En ĉi tiu kazo ĉiuj ekvacioj plisimpliĝas:

$$i_0 = 0 - \text{dum la temperaturo } 0^\circ\text{C kaj la premo 1 bar}$$

$$t_0 = 0^\circ\text{C}$$

$$i - i_v = c_p(t - t_0) = q$$

Tial estas:

(65a)

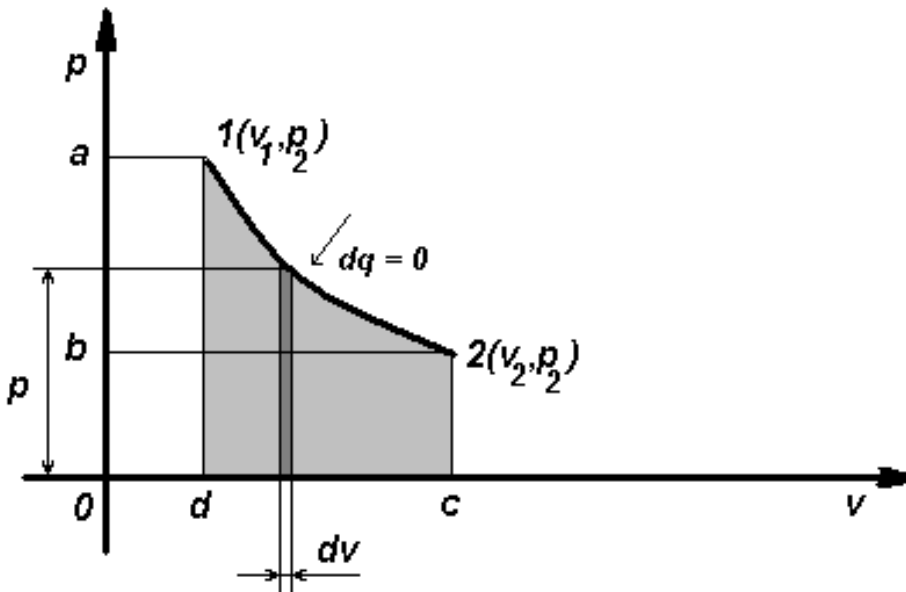
$$i = c_p t$$

**La bildigo de procezoj en p – v diagramo**

**1) Volumena laboro**

$$dq = 0$$

$$a_{1,2} = u_1 - u_2 = \int_1^2 p dv$$

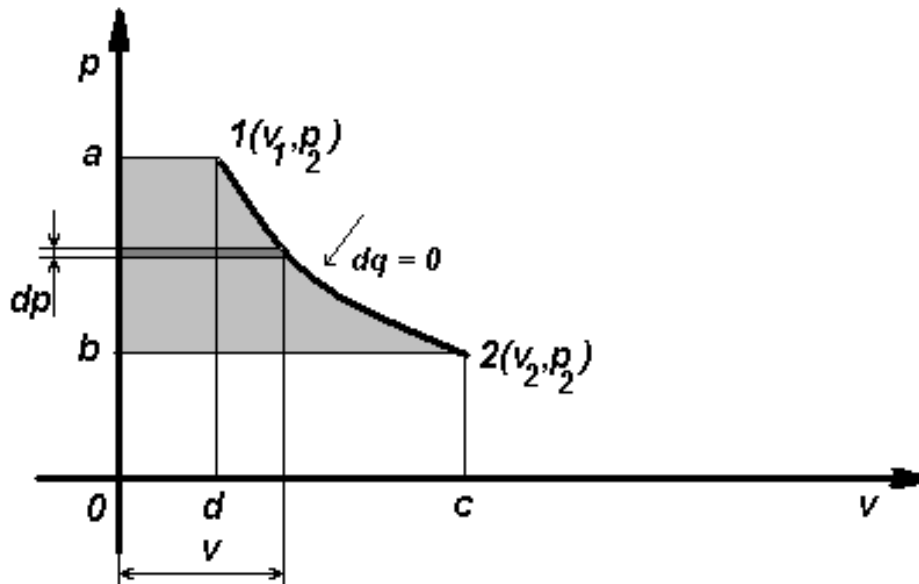


La areo 1-2-c-d reprezentas la volumenan laboron.

**1) 2) Teknika laboro**

$$dq = 0$$

$$a_t = i_1 - i_2 = \int_1^2 v dp$$



La areo 1-2-b-a reprezentas la teknikan laboron.

---

### Inversaj kaj neinversaj procezoj

Oni dividas la termodinamikajn procezojn en du grupojn:

- 1) la unua enhavas inversajn procezojn
- 2) la dua enhavas neinversajn procezojn.

#### La inversaj procezoj

La iversa ŝanĝo estas tia procezo, en kiu la sistemo transpasas nur ekvilibrajn statojn. La procezo efektivigas senfine malrapide. La gaso estas sen ena kaj ekstera frotado.

La materio estas en ekvilibra stato, kiam estas en ĉiu loko de ĝia volumeno la sama premo kaj la sama temperaturo. Oni memkompreneble eligas la bruladon, ĉar dum la brulado la materio substance ŝanĝiĝas. Ĉi tiu procezo apartenas al sfero de kemio.

Post la plenumiĝo de ĉi tiuj kondiĉoj povas la inversaj procezoj – en ambaŭ direkto – efektivigi. Dum la rea procezo trapasas la materio la samajn statojn, kiuj jam antaŭe estis trapasitaj. Ĝi revenas al sia komenca kaj eka statoj.

#### La neinversaj procezoj

Realaj gasoj, kies unuopaj maseroj interfrotiĝas, povas efektivigi nur neinversajn procezojn. La gasa labormaterio ne trapasas ekvilibrajn statojn. Ja, ĉiu procezo okazas nur tiam, kiam la materio volas atingi ekvilibrecon. Tial oni ne povas por ĉi tiuj procezoj de realaj gasoj uzi la statan ekvacion. La materio ne revenas al sia komenca stato sed ĝi emas atingi ion daŭran ekvilibran staton forlasante sian neekvilibrecon.

#### Fundamentaj inversaj procezoj de ideala gaso



La termodinamikaj procezoj estas la staliĝoj de la gaso, kiu estas kaŭzitaj per la alkonduko aŭ forkonduko de energio al la gaso.

La fundamentaj termodinamikaj procezoj de ideala gaso estas tiaj aliĝoj, kiuj limigas tutajn aliĝzonojn indikante ilin per siaj ekstremaj ecoj.

La fundamentaj termodinamikaj procezoj estas:

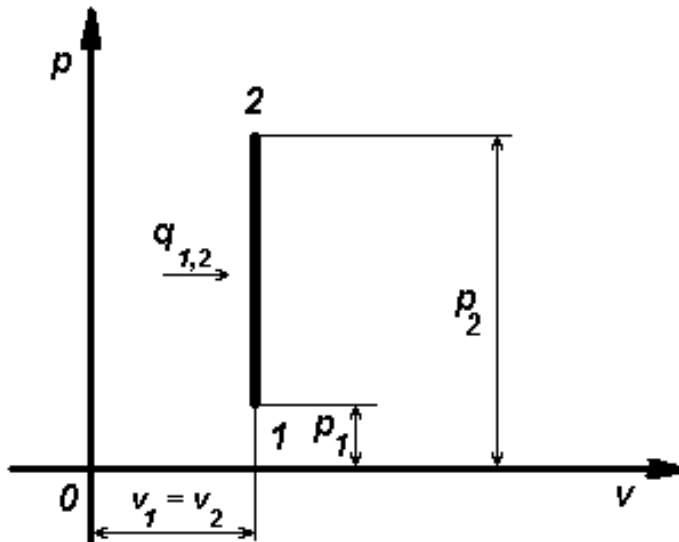
- 1) la izohora procezo – procezo dum la konstanta volumeno (samvolumena procezo)
- 2) izobara procezo – procezo dum la konstanta premo (samprema procezo)
- 3) la izoterma procezo – procezo dum la konstanta temperaturo (samtemperatura procezo)
- 4) la adiabata procezo – procezo sen iu alkonduko aŭ forkonduko de la varmo (senvarminterŝanĝa procezo)
- 5) la politropa procezo – procezo difinita per la rilato:  $pv^n = \text{konst.}$

**1) La izohora procezo**

La izohora procezo okazas, kiam oni alkondukas aŭ forkondukas la varmon al la gaso dum ĝia konstanta volumeno.

$$v = \text{konst}$$

$$dv = 0$$



Laŭ la stata ekvacio  $pv = rT$  validas:

$$p_1v_1 = rT_1 \text{ - por la komenca stato}$$

$$p_2v_2 = rT_2 \text{ - por la fina stato}$$

(66)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Dum la izohora procezo estas la premo proporcia al la absoluta temperaturo. La alkondukita varmo estas:

$$dq = du + pdv$$

$$dv = 0$$

$$dq = du = c_v dT$$

(67)

$$q_{1,2} = c_v(T_2 - T_1) = c_v(t_2 - t_1) = u_2 - u_1$$

La alkondukita varmo plialtigas la enan energion de gaso.

La volumena laboro dum la izohora procezo ne efektiviĝas – ĝi ne ekzistas:

$$da_v = p dv \quad v = konst$$

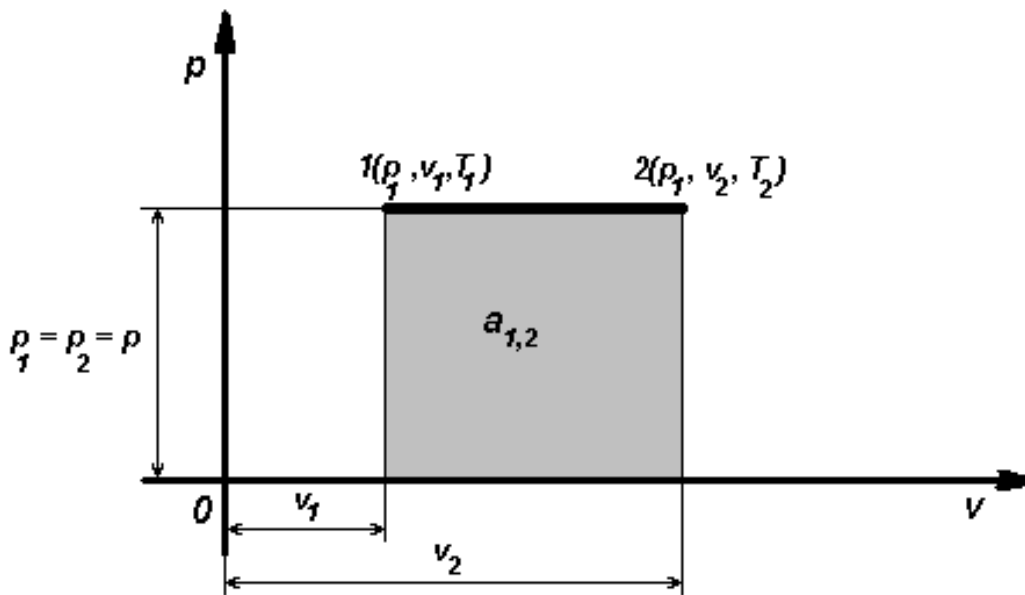
$$a_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} p dv \quad dv = 0$$

$$a_{v_{1,2}} = 0$$

av – la volumena laboro

**2) La izobara procezo**

La izobara procezo okazas, kiam oni alkondukas aŭ forkondukas la varmon al la gaso dum ĝia konstanta premo.



El

al stata ekvacio validas ĉi tiu rilato:

$$p = konst$$

$$p_1 = p_2 = p$$

$$p_1 v_1 = r T_1 - \text{por la komenca stato}$$

$$p_2 v_2 = r T_2 - \text{por la fina stato}$$

(68)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Dum la izobara procezo estas la volumeno proporcia al la temperaturo. Oni povas ankaŭ ĉi tiun rilaton esprimi jene:

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{T_2}{T_1}$$

v – la volumeno de 1 kg da gaso [m<sup>3</sup>/kg]

ρ – la specifa maso de gaso [kg/m<sup>3</sup>]

(68a)

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

La specifaj masoj de gaso estas malrekte proporciaj al la absolutaj temperaturoj dum la izobara procezo.

La volumena laboro dum la izobara procezo estas:

(69)

$$a_{v_{1,2}} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = p \int_{v_1}^{v_2} dv = p(V_2 - V_1)$$

Kiam oni anstataŭigas en ĉi tiu rezulto la esprimon  $p$  pere de esprimo  $rT$  laŭ la stata ekvacio oni ekhavas jenan formon:

$$a_{v_{1,2}} = r(T_2 - T_1)$$

Por la plivarmigo de la diferenco je 1 °C validas:

$$a_v = r$$

Laŭ ĉi tiu ekvacio la gasa konstanto  $r$  egalas al la volumena laboro kiu efektivigas 1 kg da gaso plivarmigita je unu grado de Celsius dum la konstanta premo:

Laŭ la ekvacio esprimanta la rilatojn de la unua termodinamika teoremo validas:

$$p = konst \quad dq = c_v(dT + pdv)$$

$$dp = 0 \quad dq = c_v dT + r dT$$

$$pdv + v dp = r dT \quad dq = (c_v + r) dT$$

$$pdv = r dT \quad dq = c_p dT$$

$$dq = di$$

(70)

$$q_{1,2} = c_p(T_2 - T_1) = i_2 - i_1$$

La tuta varmo por la plivarmigo de  $m$  kg da gaso estas:

(70a)

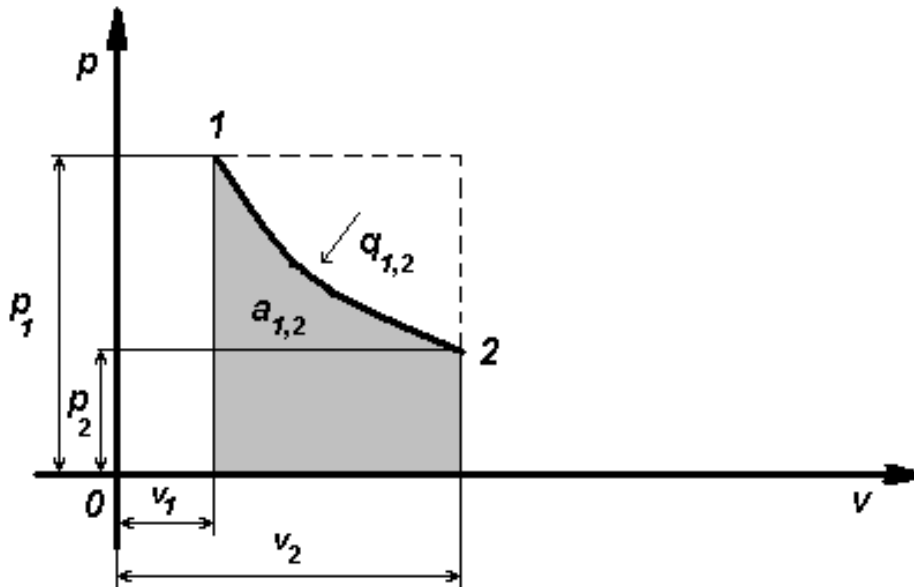
$$Q_{1,2} = mc_p(T_2 - T_1) = m(i_2 - i_1) = J_2 - J_1$$

La ekvacio vidigas, ke la alkondukita varmo dum konstanta premo plialtigas la entalpijon de gaso.

La izobara procezo troviĝas en praktiko ekzemple en kaldrono dum varmigo de akvo, dum kondensado, dum vaporigado kaj dum varmigeo de vaporo. Sed ni devas konscii, ke dum ĉi tiuj, en unu ciklo, kunigitaj procezoj ekzistas kaj devas ekzisti la premdiferenco inter la komenca kaj fina statoj. Kiel la komencan staton oni konsideras la eniron de la labormaterio en la kaldronon kaj la fino de ciklo oni pozicias en ĉi tiu kazo malantaŭen de la turbino – en la kondensadon. Konsiderante la unuopajn procezojn en apartaj ekipaĵoj kiel izobarajn, oni nur plisimpligas en limoj, kiu estas por la precizeco de kalkulo kaj konstruo akcepteblaj.

### 3) La izoterma procezo

La izoterma procezo okazas, kiam oni alkondukas aŭ forkondukas la varmon al la gaso dum ĝia konstanta temperaturo.



La rilatoj por la izoterma procezo laŭ la stata ekvacio estas:

$$p_1 v_1 = rT$$

$$p_2 v_2 = rT$$

$$\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = 1$$

aŭ

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = pv = konst$$

aŭ

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

La ekvacio  $pv = konst$  esprimas, ke la produkto de premo kaj volumeno estas konstanta, ke inter la premo kaj volumeno estas malrekta proporcieco. La ekvacio de izoterma kurbo – izotermo – estas samtempe la ekvacio de egalaksa hiperbolo kun asimtotoj kuŝantaj en la aksoj x kaj y, (v kaj p).

Laŭ la ekvacio esprimanta la rilatojn de la unua termodinamika teoremo validas:

$$dT = 0$$

$$du = 0$$

$$dq = du + pdv = c_v dT + pdv$$

$$dq = du + pdv = da$$

Tio signifas, ke dum la izoterma procezo la ena kinetika energio de gaso ne ŝanĝiĝas. Ĉiu alkondukita varmo transformiĝas en la laboron.

$$p = \frac{rT}{v}$$

$$dq = da = rT \frac{dv}{v}$$

post la integrado:

(72)

$$q_{1,2} = a_{1,2} = rT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = rT \ln \frac{v_2}{v_1}$$

aŭ ankaŭ:

(72a)

$$q_{1,2} = a_{1,2} = rT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

#### 4) La adiabata procezo

Dum la adiabata procezo oni nek alkondukas nek forkondukas la varmon al labormaterio. La procezo efektiviĝas en la izolita sistemo. La varminterŝanĝo kun ĉirkaŭaĵo estas malebligita – ĝi ne egzistas.

La ekvacio de la unua termodinamika teoremo havas la sekvan formon:

$$q = konst$$

$$dq = 0$$

$$dq = 0 = c_v dT + p dv$$

El la diferenciigita stata ekvacio oni anstataŭigas dT

$$dqT = \frac{1}{r}(p dv + v dp)$$

$$r = c_p - c_v$$

Post la anstataŭigo estas:

$$\frac{c_v}{r}(p dv + v dp) + p dv = 0$$

$$p dv + v dp + \frac{r}{c_v} p dv = 0$$

$$p dv + v dp + \frac{c_p - c_v}{c_v} p dv = 0$$

$$p dv + v dp + (\kappa - 1) p dv = 0$$

$$v pd + \kappa p dv = 0$$

post divido per pv

$$\frac{dp}{p} + \kappa \frac{dv}{v} = 0$$

kaj post la integrado estas:

$$\ln p + \kappa \ln v = \ln konst$$

(73)

$$pv^\kappa = konst$$

aŭ

$$p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa = pv^\kappa = konst$$

La ekvacio (72) estas la ekvacio de la adiabata kurbo – adiabato.

La dependenco inter la fundamentaj stataj grandoj p, v, T estas jena:

(73a)

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa$$

Ĉi tio estas la alia formo de la ekvacio (73). Laŭ la stata ekvacio validas:

$$p_1 v_1 = r T_1$$

$$p_2 v_2 = r T_2$$

$$\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Post la anstataŭigo de  $\frac{p_1}{p_2}$  per  $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^\kappa$  estos:

(73b)

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa-1}$$

Post la anstataŭigo de  $\frac{v_1}{v_2}$  per  $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$  ekestos:

(73c)

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Dum la adiabata procezo efektiviĝas la volumena laboro malprofite por la ena energio de gaso. Dum la adiabata kunpremo la temperaturo plialtiĝas. Dum la adiabata ekspansio la temperaturo malplialtiĝas.

La rilatoj por la laboro havas la sekvan formon:

$$dq = 0 = du + da$$

$$da = -du$$

Post la integrado ekestos:

$$a_{1,2} - (u_2 - u_1) = u_1 - u_2 = c_v(T_1 - T_2) = c_v T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Kiam oni anstataŭigas por  $T_1 = \frac{p_1 u_1}{r}$  el la stata ekvacio kaj por

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

el la ekvacio (72a) oni ricevos:

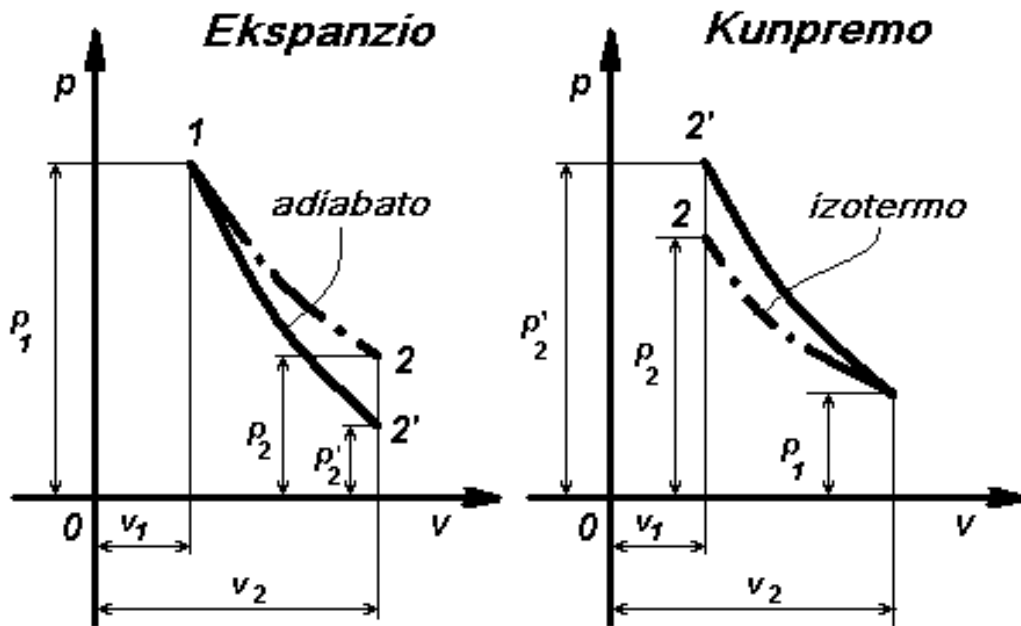
$$a_{1,2} = \frac{c_v}{r} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]$$

Sed  $\frac{c_v}{r} = \frac{1}{\kappa - 1}$  kaj tial oni povas skribi:

(74)

$$a_{1,2} = \frac{1}{\kappa - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]$$

**Komparo de la izotermaj kaj adiabatikaj kurboj**



La komparo de proceztendencoj de izoterma kaj adiabatika kurboj estas grava, ĉar ambaŭ kurboj reprezentas ekstremajn kazojn de termodinamikaj ŝanĝoj, kaj ili dividas diagramojn en tipajn partojn. La rilatoj de la adiabato kaj izoterma esprimitaj per sekvaj ekvacioj

(adiabato) — >  $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^\kappa$   
 (izotermo) — >  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}$

klare montras, ke la sama volumenpligrandiĝo kaŭzas dum la ekspansio de la adiabatata procezo pligradan malaltigon de la premo ol dum la izoterma ekspansio.

El analizo de ĉi tiuj kurbekvacioj ankaŭ rezultas, ke la adiabatata kurbo havas pli altiĝantan tendencon ol la izoterma.

**5) La politropa procezo**

La izoterman kaj adiabatan procezojn oni ne povas praktike realigi. Ili reprezentas idealajn procezojn, al kiuj oni klopodas alproksimiĝi. La realaj procezoj en piŝtaj varmmaŝinoj sekvas laŭ kurboj situataj inter la izotermo kaj adiabato. Oni nomas ĉi tiujn kurbojn – politropajn. Matematike oni esprimas la politropajn procezojn per ekvacioj por la ideala gaso jene:

(75)

$$pv^n = konst$$

aŭ

(75a)

$$vdp + npdv = 0$$

La ekvacio 75a ekestis post la derivado de la ekvacio 75:

La ekvacio (75a)  $pv^n = konst$  estas la ekvacio de politropaj kurboj, kiujn oni povas desegni en la koordinata sistemo p-v.

Kiam oni substrahas la ekvacion (75a) de la derivita stata ekvacio, oni ricevas la sekvan rezulton:

$$vdp + npdv = 0$$

$$vpd + pdv = r dT$$

$$(n - 1)pdv = -r dT$$

Ĉi tiun rezulton oni uzos por la anstataŭigo en la ekvacio de la varmo:

$$dq = du + pdv$$

$$dq = c_v dT - \frac{r dT}{n - 1} = \left( c_v - \frac{r}{n - 1} \right) dT = \left( c_v - \frac{c_p - c_v}{n - 1} \right) dT$$

(76)

$$dq = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1}$$

La esprimon

$$c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} = c_n$$

oni nomas la specifa varmo de la politropa procezo.

Tial la ekvacio (76) plisimpliĝas jene:

(76a)

$$dq = c_n dT$$

kaj post la integrado estas:

(76b)

$$q_{1,2} = c_n (T_2 - T_1) = c_n (t_2 - t_1)$$

La specifa politropa varmo havas dum ordinaraj ŝanĝiĝoj, kies kurbo situas en p-v diagramo inter la izotermo kaj adiabato, la eksponenton n en ĉi tiuj limoj

$$1 < n < \kappa$$

El la ekvacio por  $c_n = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1}$  rezultas, ke la specifa politropa varmo estas negativa, tio signifas, ke dum la

ekspansio oni devas aldoni la varmon al la gaso kaj dum la kunpremado forkonduki ĝin.

Oni povas ĝenerale ĉiujn procezojn de ideala gazo konsideri, kiel politropajn procezojn. En ĉi tiu kazo havas la eksponento valorojn ek de  $-\infty$  ĝis  $+\infty$ . Memkompreneble ke ankaŭ la fundamentaj termodinamikaj procezoj povas esti konsiderataj termodinamikaj procezoj.

Tial validas, ke

la izobaro estas la politropo kun  $n = 0$ ;  $pv_0 = p = konst$

la izoĥoro estas la politropo kun  $n = \infty$ ;  $p^{\frac{1}{n}} v_1 = p^0 v = v = konst$

la izotermo estas la politropo kun  $n = 1$ ;  $pv = v = konst$

la adiabato estas la politropo kun  $n = \kappa$ ;  $pv^\kappa = konst$ .

Kiam oni donas al ĉiujn valorojn anstataŭ la eksponento n en la ekvacion de la specifa politropa varmo,

$$c_n = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1}$$

tiam oni ricevos:

por la izobara procezo -  $n = 0$ ;  $c_n = c_v \frac{0 - \kappa}{n - 1} = c_v \kappa = c_p$

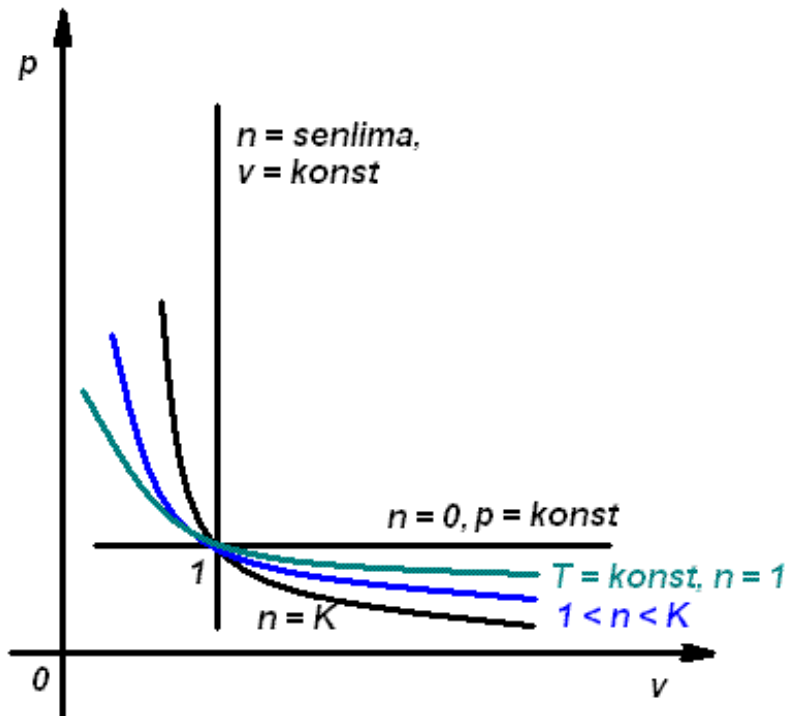
por la izoĥora procezo -  $n = \infty$ ;  $c_n = c_v \frac{\infty - \kappa}{n - 1} = c_v \cdot 1 = c_v$

por la izoterma procezo -  $n = 1$ ;  $c_n = c_v \frac{1 - \kappa}{1 - 1} = c_v \frac{1 - \kappa}{0} = \infty$



por la adiabata procezo  $-n = \kappa$ ;  $c_n = c_v \frac{\kappa - \kappa}{\kappa - 1} = c_v \frac{0}{\kappa - 1} = 0$

La kurboj de fundamentaj termodinamikaj procezoj desegnataj kiel politropaj kun apartenanta eksponento  $n$  en la  $p$ - $v$  diagramo:



Por la politropo validas la samaj matematikaj rilatoj kiel por la adiabato.

La dependeco de stataj grandoj estas:

(77)

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^n$$

(78)

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}$$

(79)

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

La volumena laboro dum la politropa procezo estas:

(80)

$$a_v = \frac{1}{n-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$$

Laŭ la ekvacio de varmo estas la laboro:

$$dq = du + da$$

$$da = dq - du = c_n dT - c_v dT = c_v^{\frac{n-\kappa}{n}} dT - c_v dT = -c_v \frac{\kappa-1}{n-1} dT$$

$$a = c_v \frac{\kappa - 1}{n - 1} T \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

samtempe validas:

$$c_v(\kappa - 1) = r$$

tial oni povas skribi:

$$a = \frac{r}{n - 1} T_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

kaj post la anstataŭigo de  $T_2/T_1$  ekestos:

$$a = \frac{1}{n - 1} r T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$$

Ĉi tio estas la alia formo de la ekvacio (80), ĉar  $p_1 v_1 = r T_1$  laŭ la stata ekvacio.

Kiam oni konas du punktojn de politropo, oni povas alkalkuli la politropan eksponeneton  $n$ , uzante la sekvan ekvacion:

$$\left( \frac{v_2}{v_1} \right)^n = \frac{p_1}{p_2}$$

kaj logarintme ĝin, oni ricevas:

$$n \log \frac{v_2}{v_1} = \log \frac{p_1}{p_2}$$

(81)

$$n = \frac{\log \frac{p_1}{p_2}}{\log \frac{v_2}{v_1}}$$

La ekvacio de la politropo post la logaritmo ricevas la formon de la linera ekvacio:

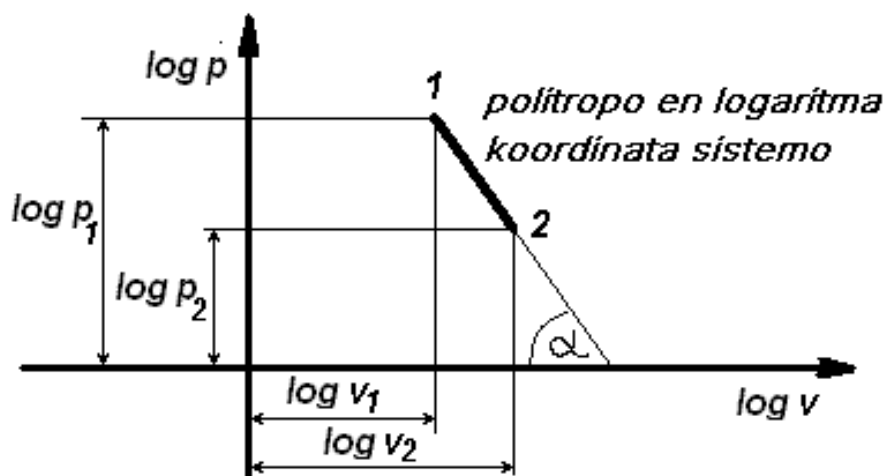
$$p v^n = konst$$

(82)

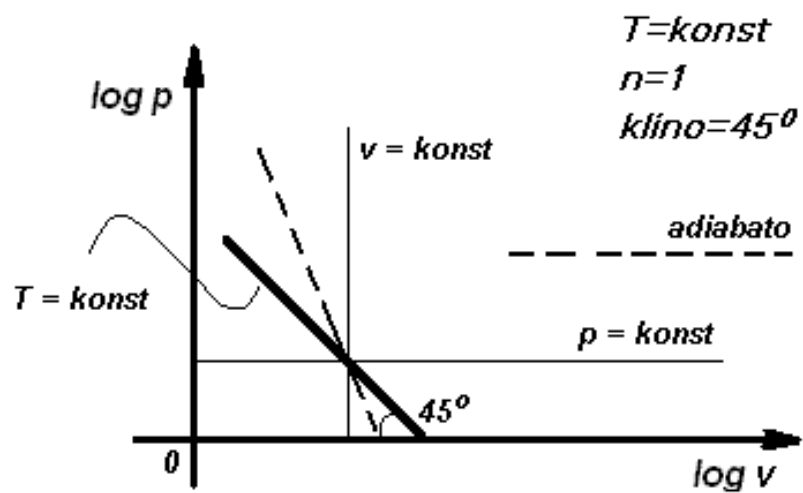
$$\log p + n \log v = konst$$

La eksponanto  $n$  estas la tangento de la angulo  $\alpha$ , kiu estas inter la politropo kaj la akso  $x$  ( $\log V$ ):

$$n = tg \alpha = \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log v_2 - \log v_1}$$



La  $p$ - $v$  diagramo kun desegnitaj fundamentaj termodinamikaj procezoj plisimpliĝas en logaritma koordinata sistemo.  
La kurboj ŝanĝiĝas en rektaj liniojn:



# Artikolaj fontoj kaj kontribuantoj

**Termodinamiko/Leciono 2** *Fonto:* <http://eo.wikibooks.org/w/index.php?oldid=12081> *Kontribuantoj:* Aleksandro, Kajaao, OliverWeb, 3 Anonimaj redaktaj

## Bildaj fontoj, licencoj kaj kontribuantoj

**dosiero:Pv\_ena\_energio.GIF** *Fonto:* [http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Pv\\_ena\\_energio.GIF](http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Pv_ena_energio.GIF) *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Aleksandro

**dosiero:Entalpio.GIF** *Fonto:* <http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Entalpio.GIF> *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Aleksandro

**Dosiero:Volumena\_laboro.GIF** *Fonto:* [http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Volumena\\_laboro.GIF](http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Volumena_laboro.GIF) *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Aleksandro

**Dosiero:Teknika\_laboro.GIF** *Fonto:* [http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Teknika\\_laboro.GIF](http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Teknika_laboro.GIF) *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Aleksandro

**Dosiero:Izohora\_procezo.GIF** *Fonto:* [http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Izohora\\_procezo.GIF](http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Izohora_procezo.GIF) *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Aleksandro

**Dosiero:Izobara\_procezo.GIF** *Fonto:* [http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Izobara\\_procezo.GIF](http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Izobara_procezo.GIF) *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Aleksandro

**Dosiero:Izoterma\_procezo.GIF** *Fonto:* [http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Izoterma\\_procezo.GIF](http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Izoterma_procezo.GIF) *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Aleksandro

**Dosiero:Adiabato\_kaj\_izoterma.GIF** *Fonto:* [http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Adiabato\\_kaj\\_izoterma.GIF](http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Adiabato_kaj_izoterma.GIF) *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Airon90, Aleksandro

**Dosiero:Politropo.GIF** *Fonto:* <http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Politropo.GIF> *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Aleksandro

**Dosiero:Politropo\_loglog.GIF** *Fonto:* [http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Politropo\\_loglog.GIF](http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Politropo_loglog.GIF) *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Aleksandro

**Dosiero:Logp\_logv.GIF** *Fonto:* [http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Logp\\_logv.GIF](http://eo.wikibooks.org/w/index.php?title=Dosiero:Logp_logv.GIF) *Permesilo:* nekonata *Kontribuantoj:* Aleksandro

## Permesilo

---

Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported  
[//creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)