

La relativeca tempo – I

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

6-a de Marto de 2006

Resumo

La relativeca tempo estas malsama ol la Newtona. Ni revidos iujn el tiuj malsamaj en Doppler-efekto, ĝemel-paradokso, rotacio, rigida stango kaj konstanta akcelo.

1 Enkonduko

Astronomiaj observoj antaŭ longe montris ke la vakuo-lumo-rapido c ne dependas de la fontrapidado nek de la observantrapidado; ĉi tiu konstato generis je 1905 la relativecan teorion (specialan) kaj poste la konvencion [1]: la vakuo-lumo-rapido estas senerare $c := 299.792.458m/s$. Tiu konvencio ŝnurligas *metron* kun *sekundo*, t.e., la ekzistado de la universala konstanto c samestece unuigas tempon kun spaco. Tamen, ĉiutage oni preferas persisti la distingon inter la intertempa kaj la interspaca konceptoj; eble ĉar $1s$, kiu estas intertempo sufiĉe konvena por la homa skalo, samvaloras $299.792.458m$, kiu estas interspaco tro granda por nia skalo.

Aliaj eksperimentoj [2] montris ke la lumo-fonta *rapido* ŝanĝas la observatan lumo-periodon (Doppler-efektojn), sed la *akcelo* ne ŝanĝas ĝin. Tiu lasta fakto forte sugestis la uzon de elektromagneta radiado por difini tempan normo-unuon [1], [3, paĝo 28]: *sekundo* (intervala unuo $\Delta\tau$ de *proprate*) estas la daŭro de 9.192.631.770 periodoj de la lumo eligita je la transiro inter du specifaj niveloj de la atomo de cezio-133. Kiel konsekvenco de la difinoj de c kaj de *sekundo*, aŭtomate ekestiĝis ke *metro* estas la interspaco trakurata de la vakuo-lumo dum la frakcio $1/299.792.458$ de *sekundo* [1, 4].

Horloĝo fide montranta la sekundo-sinsekvon nomiĝas *normohorloĝo*, kiun ni ofte nomigos simple horloĝo. La fakto je c havi fiksan valoron ebligas horloĝon kiu senpere montras la kvanton $c\Delta\tau$ (havanta longeco-dimension) anstataŭ apenaŭ $\Delta\tau$ (havanta tempo-dimension). La plej fidindaj horloĝoj estas la ellaborataj atomohorloĝoj. Tamen la familiara brakhorloĝo povas esti konsiderata kiel normohorloĝo, kiam oni ne postulas tre precizan tempomezuron.

Konvenas memori ke la horloĝa ritmo ne estas absoluta, laŭ la jena senco. Imagu du komence apudajn sinkronajn horloĝojn. Poste apartigu kaj submetu ilin al malsamaj kondiĉoj de rapido kaj de gravita potencialo. Ĉiu horloĝo daŭrigos registri la paŝon de *sia* proprate tempo pere de la

akumulado de *siaj* sekundoj. Ĉe eventuala renkonto de la horloĝoj, la du akumulitaj registroj probable estos malsamaj.

En la sekvantaj sekcioj ni raportos iujn tempajn fenomenojn ĉe la special-relativeca kunteksto. Ni studos la tempon ĉe eksperiment-rezultoj, Doppler-efekto, ĝemel-paradokso, sinkronigo kiel Einstein, horloĝoj en rekta movo, horloĝoj en cirkla movo, periodo, rigida stango kaj konstanta akcelo.

Indas citi Rindler [5, paĝo 44], kiu emfazis ke “same kiel la spaca malplivastiĝo, ankaŭ la tempa dilato estas *reala*”. Sekve ĉiu, kiun ni diras pri horloĝa paŝado, validas ankaŭ por ĉia ajn fizika fenomeno.

2 Eksperiment-rezultoj

Ni elmetos du eksperiment-rezultojn kiuj konfirmas special-relativecajn antaŭvidojn.

2.1 Muona defalo

La malrapideco de moviĝantaj horloĝoj estas observata ĉe la defalo de muonoj kiuj estas kreaĵoj en la alta tera atmosfero kaj desintegriĝas en siaj trajektorioj al detektiloj ĉe malplia altitudo. Ja, la muona meza-vivo estas $\Delta\tau \approx 2,22\mu s$ (propratempe). Laŭ la Newtona kinematiko, tiuj muonoj, eĉ se vojaĝus ĉe la rapido c , trakurus apenaŭ ĉirkaŭ $700m$ antaŭ desintegriĝi; do nur sensignifa procento de ili estus trovata ĉe la marnivelo. Tamen, estas granda la procento detektata ĉe ni, malalte [6, paĝo 702]. La relativeca kialo estas ke muonoj vojaĝantaj ĉe rapido $v = 0,9999c$ vivas, kiel mezurata per ripoza horloĝo, ĉirkaŭ $70\Delta\tau$. Do muonoj povas vojaĝi ĉirkaŭ $50km$ antaŭ desintegriĝi, kio eksplikas ĝian oftan detektadon ĉe malgranda altitudo.

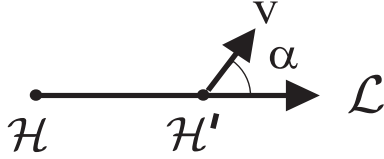
2.2 Ciklotrono

La special-relativeco ankaŭ korekte manipulas la malrapidecon de la evoluo de sistemoj ĉe rapida cirkla movo en la interno de ciklotrono. Ja, nefirmaj partikloj, kun mallongaj meza-vivoj, prezentas grandan postvivon ĉe tiuj kondiĉoj [7], eksplikatan denove per la relativeca tempa dilato.

3 Doppler-efektoj

Imagu ke mi havas ĉe mi horloĝon \mathcal{H} , kiu registras la fluon de mia propratempe τ . Mi estas rigardanta alian horloĝon \mathcal{H}' , kiu registras la fluon de sia propratempe τ' . Tiu horloĝo \mathcal{H}' moviĝas ĉe vektora rapido \mathbf{v} rilate al mia. Mi **vidas** (nudokule aŭ dulornete aŭ teleskope) ke dum la \mathcal{H}' registro antaŭeniras $\Delta\tau'$, mia horloĝa registro antaŭeniras $\Delta\tau_p \neq \Delta\tau'$. Ni uzas la subsignon p (post) en $\Delta\tau_p$ por memori ke dum $\Delta\tau'$ estas la intertempo inter du lumaj eligoj de \mathcal{H}' , kontraŭe $\Delta\tau_p$ estas la intertempo inter la alveno de tiuj signaloj al \mathcal{H} . Tiu registra malsamo *ĉiam* havas relativecan faktoron (“tempa dilato”) multiplike supermetitan kun ordinara Dopplera faktoro de la Newtona kinematiko. La rilato inter $\Delta\tau_p$ kaj $\Delta\tau'$ dependas de la modulo de la rapido \mathbf{v} , kaj de la orientado de \mathbf{v} rilata al la vida rekto \mathcal{L} de \mathcal{H} al \mathcal{H}' . Ni nomigu α la angulon inter \mathcal{L} kaj \mathbf{v} , kiel sur la figuro 1.

Nun ni rilatos $\Delta\tau'$ al $\Delta\tau_p$ ĉe 5 Doppler-efektaĵoj okazoj. Ni vidos ke en ĉiu el ili la relativeca kaj la Newtona antaŭvidoj koincidas nur ĉe unua ordo de v/c .



Figuro 1: La horloĝoj \mathcal{H} (mia, ripozanta) kaj \mathcal{H}' (moviĝanta).

3.1 Transverso, $\alpha = \pi/2$

Ĉe $\alpha = \pi/2$, la horloĝo \mathcal{H}' estas momente “flanke iranta” rilate al mi. En tiu movo, ĝia interspaco rilate al mi estas momente konstanta. Konsideru la specialan okazon en kiu \mathcal{H}' estas ĉe cirkla movo ĉe konstanta rapido v , kaj mi estas en iu punkto de la rotacia akso; ĉe tiu okazo la interspaco inter ni estas konstanta. Do mi **vidas** la \mathcal{H}' registron antaŭeniri pli malrapide ol tiun de mia \mathcal{H} . Dum la registro de mia \mathcal{H} antaŭeniras $\Delta\tau_p$, mi **vidas** la registron de \mathcal{H}' antaŭeniri apenaŭ [8, paĝo 118]

$$\Delta\tau' = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta\tau_p. \quad (1)$$

Tiu malsamo de legoj nomiĝas transversa Doppler-efekto, aŭ ruĝ-delokigo, ĉar lumo-radiado eligita el \mathcal{H}' ŝajnas, kiam observata per mi, kvazaŭ delokigata al ruĝo. La Newtona antaŭvido estas $\Delta\tau' = \Delta\tau_p$; tial la transversa Doppler-efekto estas dirita nemikse relativeca.

3.2 Foriĝo, $\alpha = 0$

Ĉe $\alpha = 0$, la horloĝo \mathcal{H}' radiuse foriĝas de mi, ĉe konstanta rapido v . Do mi **vidas** la \mathcal{H}' registron antaŭeniri pli malrapide ol tiun de mia \mathcal{H} , kaj pli akcente ol la okazo 3.1. Dum la registro de mia \mathcal{H} antaŭeniras $\Delta\tau_p$, mi **vidas** la registron de \mathcal{H}' antaŭeniri apenaŭ [8, paĝo 117]

$$\Delta\tau' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} \Delta\tau_p = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \Delta\tau_p. \quad (2)$$

Newtona $\Delta\tau' = \Delta\tau_p/(1 + v/c)$. Ĉar ĉe ambaŭ teorioj, relativeca kaj Newtona, validas $\Delta\tau' < \Delta\tau_p$, tial ambaŭ antaŭvidas ruĝ-delokigon (nun ankaŭ nomatan foriĝan Doppler-efekton). Notu ke la relativeca delokigo $\Delta\tau_p - \Delta\tau'$ estas pli granda ol la Newtona.

3.3 Alproksimiĝo, $\alpha = \pi$

Ĉe $\alpha = \pi$, la horloĝo \mathcal{H}' radiuse alproksimiĝas min, ĉe konstanta rapido v . Nun mi **vidas** la \mathcal{H}' registron antaŭeniri pli rapide ol tiun de mia \mathcal{H} . Dum la registro de mia \mathcal{H} antaŭeniras $\Delta\tau_p$, mi **vidas** la registron de \mathcal{H}' antaŭeniri pli rapide [8, paĝo 117],

$$\Delta\tau' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c} \Delta\tau_p = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \Delta\tau_p. \quad (3)$$

Newtona $\Delta\tau' = \Delta\tau_p/(1 - v/c)$. Tiu efekto nomiĝas Dopplera de radiusa alproksimiĝo, aŭ viol-delokigo. Kontraŭe okazo 3.2 (foriĝo), la relativeca delokigo $\Delta\tau' - \Delta\tau_p$ estas malpli granda ol la Newtona.

Pasante, notu ĉe (3) la *faktoron* k de Bondi [9, paĝo 387], $\sqrt{(1 + v/c)/(1 - v/c)}$.

3.4 Ĝeneralo, $\alpha = \text{iom ajn}$

Ĉi tiu okazo kunigas la 3 antaŭajn okazojn kaj ilin ĝeneraligas. Dum la registro de mia \mathcal{H} antaŭeniras $d\tau_p$, mi **vidas** tiun de \mathcal{H}' antaŭeniri [8, paĝo 118]

$$d\tau' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c) \cos \alpha} d\tau_p. \quad (4)$$

Newtonne $d\tau' = d\tau_p/[1 + (v/c) \cos \alpha]$. Simpla kalkulo montras ke se $0 \leq |\alpha| < \pi/2$, la Newtona kaj la relativeca antaŭvidoj ambaŭ estas ruĝ-delokigo ($d\tau' < d\tau_p$). Sed se $\pi/2 < |\alpha| \leq \pi$, la analizo estas malpli simpla: Newtonne ĉiam okazas viol-delokigon ($d\tau' > d\tau_p$), kontraŭe relativece okazas viol-delokigon nur se la rapido de \mathcal{H}' estas sufiĉe malgranda, $v/c < 2/|\cos \alpha + \sec \alpha|$; se la rapido estas pli granda, la relativeco antaŭvidas ruĝ-delokigon ($d\tau' < d\tau_p$), kvankam la interspaco de \mathcal{H}' al \mathcal{H} malgrandiĝas.

3.5 Logaritma spiralo

Ni notas ke ĉe (1), en kiu $\alpha = \pi/2$, validas $d\tau' < d\tau_p$, kaj ke ĉe (3), en kiu $\alpha = \pi$, validas $d\tau' > d\tau_p$. Do surmetante $d\tau' = d\tau_p$ ĉe (4), ni trovas la valoron de α en la intervalo $(\pi/2, \pi)$ kiu momente nuligas la relativecan Doppler-efekton:

$$\cos \alpha = -\frac{c}{v}(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}) \iff \tan^2(\alpha/2) = 1 + v/c. \quad (5)$$

Ĝi dependas nur de la rilato v/c , kaj povas esti skribata ankaŭ kiel

$$\cos \alpha = -\tanh(\xi/2), \quad \tanh \xi := v/c. \quad (6)$$

Por daŭre esti $d\tau' = d\tau_p$ kun v konstanta, α bezonas esti konstanta. En tiu okazo, estante \mathcal{H} ĉe la origino $r = 0$, la \mathcal{H}' trajektorio estas konverĝa logaritma spiralo, donata per

$$r = r_0 \exp[-|\varphi| \sinh(\xi/2)]. \quad (7)$$

La Newtona kinematiko antaŭvidas ke nur se la lumo-fonto plenumas cirklan movon, $\alpha = \pm\pi/2$, tial la Doppler efekto nuliĝas, $d\tau' = d\tau_p$.

4 Ĝemel-paradokso

Multe klarigan analizon de la horloĝ-paradokso (aŭ ĝemel-) faris Darwin [10], uzante la esprimojn (2) kaj (3). Estiĝu du apudaj, ripozantaj horloĝoj \mathcal{H} kaj \mathcal{H}' , kaj ripozanta punkto P ĉe 4 lumjaroj for.

Ĉe la momento $\tau = \tau' = 0$ per ambaŭ horloĝoj, \mathcal{H}' ekforiras direkte al P , ĉe konstanta rapido $v = 4c/5$, dum \mathcal{H} daŭre ripozas. Dum la foriro, ĉiu horloĝo **vidas** (nudokule aŭ dulornete aŭ teleskope) la alion antaŭeniri pli malrapide ol sin, ĉe la rilato $\sqrt{1 - v/c} \div \sqrt{1 + v/c} = \dots = 1/3$, kiel ĉe ek. (2); t.e., horloĝo kiu antaŭeniras 1 horon **vidas** la alion antaŭeniri apenaŭ 20 minutojn.

Atingante al P , \mathcal{H}' tuj revenas direkte al \mathcal{H} , ĉe rapido $4c/5$ denove. Kaj *poste iom da tempo*, dum la alproksimiĝo, ĉiu horloĝo **vidos** la alion antaŭeniri pli rapide ol sin, ĉe la rilato $\sqrt{1+v/c} \div \sqrt{1-v/c} = \dots = 3/1$, kiel ĉe ek. (3); t.e., horloĝo kiu antaŭeniros 1 horon **vidos** la alion antaŭeniri 3 horojn.

Ĉio ŝajnas simetria, do la du horloĝoj ŝajne montrus la saman registron ĉe la renkontro; sed ni sekvu la pli detalegajn malkunajn analizojn de \mathcal{H}' kaj de \mathcal{H} .

La horloĝo \mathcal{H}' pensas tiel: mi ekforiras ĉe vojaĝo, kies forira daŭro estos sama kiel la revena, ambaŭ mezurataj per mi. Dum la unua duono de mia vojaĝo mi **vidos** la \mathcal{H} registron antaŭeniri pli malrapide ol mian, ĉe la rilato $1/3$; kaj dum la dua duono mi **vidos** \mathcal{H} antaŭeniri pli rapide ol min, ĉe la rilato $3/1$. Meznombro mi konstatos ke \mathcal{H} havis paŝadon kiu estas $(1/2)(1/3) + (1/2)3 = 5/3$ de mia.

La horloĝo \mathcal{H} same konkludas per la jena analizo: \mathcal{H}' ekforiris ĉe vojaĝo de 5 foriraj jaroj kaj 5 revenaj jaroj, ĉiuj mezurataj per mi; ĉe nia renkontro mi registros $\tau = 10$ jarojn. Dum iom da tempo mi **vidos** la \mathcal{H}' registron antaŭeniri pli malrapide ol mian, ĉe la rilato $1/3$, poste mi **vidos** ĝin antaŭeniri pli rapide ol mian, ĉe la inversa rilato $3/1$. \mathcal{H}' atingos P kiam mi registros $\tau = 5$ jarojn. Ĉar P distancas 4 lumjarojn de ĉi tie, tial la informo pri la ekreveno de \mathcal{H}' atingos min nur ĉe 4 jaroj poste. Do mi **vidos** la ŝanĝon de rilato $1/3$ al rilato $3/1$ nur kiam mi registros $\tau = 9$ jarojn, kaj dum apenaŭ la 1 jaro restanta mi **vidos** la \mathcal{H}' registron antaŭeniri pli rapide ol mian, ĉe la rilato $3/1$. Meznombro mi konstatos ke la registro de \mathcal{H}' havis paŝadon kiu estas $(9/10)(1/3) + (1/10)3 = 3/5$ de mia; do ĉe la renkontro, ĉar mi registros 10 jarojn, tial \mathcal{H}' registros nur 6 jarojn.

Ĉar tiu rilato $3/5$ per \mathcal{H} estas inversa de la rilato $5/3$ per \mathcal{H}' , tial ni notas ke la du horloĝoj same konkludas: \mathcal{H} , kiu ĉiam estis ĉe la sama inercia rilatejo, montros “pli sekundojn” ol la vojaĝanta \mathcal{H}' , ĉe la rekonto.

5 Sinkrono laŭ Einstein

La registro τ de horloĝo ne gravis, ĉe niaj analizoj ĝis nun; vere, ni bezonis uzi apenaŭ ĝian ŝanĝon $\Delta\tau$. Nun ni supozu du horloĝojn, ambaŭ tenatajn en ripozo en la sama inercia rilatejo [8, paĝo 1], kaj do je la sama paŝado. Sed dum iu montras τ , la alio povas montri $\tau^* \neq \tau$. Do, ni diras ke ili estas nesinkronaj, kaj ni volas sinkronigi ilin.

Einstein sugestis la jenan recepton (difinon) por sinkronigi horloĝojn, \mathcal{H} kaj \mathcal{H}^* : ĉe la momento τ_1 registrata per \mathcal{H} , ĉi tiu eligu lumsignalon direkte al \mathcal{H}^* ; kiam ĝi atingos \mathcal{H}^* , ĝi estu tuj reflektato revene al \mathcal{H} ; kiu registru kiel τ_2 la ricevan momenton de la revena signalo, kaj kalkulu la kvanton $\Delta\tau := (\tau_2 - \tau_1)/2$. Ĉe iu posta momento τ registrata per \mathcal{H} , nova signalo estu eligata de \mathcal{H} al \mathcal{H}^* , kun la instruo ke, atingante la signalo al \mathcal{H}^* , la registro de \mathcal{H}^* estu tuj ŝanĝata ĉe $\tau + \Delta\tau$. Obeata la instruon, la du horloĝoj \mathcal{H} kaj \mathcal{H}^* estos sinkronaj, kaj tiel ili restos.

6 Horloĝa rekto

Imagu rektan vicon de ripozantaj, sinkronaj horloĝoj. Por ilin **vidi**, mi lokiĝas sufiĉe malproksime de la vico, ĉe normala direkto, kaj mi ankaŭ havas ĉe mi horloĝon.

Poste, la horloĝa vico ekmetiĝas ĉe movo ĉe konstanta rapido v paralele al si. Ĉiuj horloĝoj sam-momente ekiris, laŭ atestata per siaj registroj, kiel fore **vidita** per mi. Mi ankaŭ **vidas** ke ĉiuj same akceliĝis ĝis atingi la rapidon v . Kiel la okazo 3.1, mi **vidas** ke ĉiu moviĝanta horloĝo

paŝadas pli *malrapide* ol mia, ĉe la rilato $\sqrt{1 - v^2/c^2}$; kaj mi ankaŭ **vidas** ke ili restas sinkronaj.

Ankaŭ la moviĝantaj horloĝoj **vidas** sin ĉe la sama paŝado; sed ili **vidas** ke tiu paŝado estas pli *rapida* ol mia, ĉe la sama rilato $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Ankaŭe, ili notas ke ili nun estas nesinkronaj. Ili notas ke la ie antaŭaj horloĝoj de la moviĝanta vico estas pli iam antaŭaj ol la ie postaj. Ĉe ĉiu interspaco l , mezurata per ili, la dis-sinkrono mezurata per ili estas lv/c^2 ([8, paĝo 11], aŭ sekcio 9).

Ni supozu ke la horloĝoj decidas resinkroniĝi dum la movo. Poste la resinkroniĝo, mi ilin **vidus** nesinkronaj, tiujn ie antaŭajn pli iam malantaŭajn ol tiujn ie postajn. Ĉe ĉiu interspaco l , mezurata per ili, la dis-sinkrono **vidata** per mi estus lv/c^2 .

En sekcioj 9 kaj 10 ni diskutos alian kielon por akceli horloĝojn: ili estos fiksj ĉe rigida stango.

7 Horloĝa cirklo

Ni imagu vicon de ripozantaj, sinkronaj horloĝoj, formantaj je cirklo de radio R . Poste, la cirklo ekmetiĝas ĉe konstanta angula rapido ω , sure de si. Ĉiuj horloĝoj sam-momente ekmoviĝis, laŭ atestata per siaj registroj, kaj ĉiuj angule akceliĝis same.

Ĉe mia loko en cirklocentro, mi konfirmas ke mi **vidis** ĉiujn horloĝojn ekiri samtempe, kaj mi **vidas** ke iliaj paŝadoj fariĝis pli malrapide ol tiu de mia horloĝo (okazo 3.1), ĉe la rilato $\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$. Do la periodo de la cirkla movo mezurata per la moviĝantaj horloĝoj mem estas pli malgranda ol tiu mezurata per mi je tiu rilato. Mi **vidas** ankaŭ, kiel la rekte okazo antaŭe, ke ilia sinkrono ne malfariĝis.

Ĉiu horloĝo ĉe la moviĝanta cirklo notas ke la alioj ankoraŭ havas paŝadon same kiel sian, sed ĝi notas ke ĝi perdis la sinkronon kun ili. Ĝi ankaŭ notas ke la horloĝoj apenaŭ ie antaŭaj, ĉe la movo, estas pli iam antaŭaj ol si, kontraŭe, tiuj ke estas apenaŭ ie postaj estas iam malantaŭaj. Ĝis nun nia raporto similas al tiu de la rekta movo. Ni vidu nun la malsamojn; ili okazas ĉar la horloĝoj estas fiksj ĉe neinercia rilatejo, do la relativeca simetrio estas rompita.

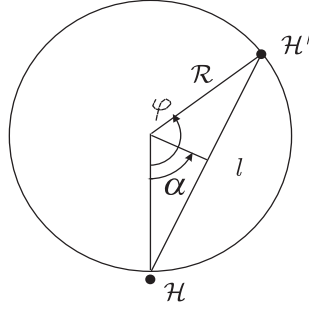
Ĉiu horloĝo de la cirklo notas ke sia paŝado estas pli *malrapida* ol mia, haltadita ĉe la cirklocentro. Ankaŭe, ne ekzistas kielo per kiu la horloĝoj ĉe cirkla movo povas ĉiue sinkroniĝi laŭ Einstein.

8 Periodo

Kial ekzerco, ni nun rehavigos la rilaton inter la periodoj de la cirkla movo, lokigante min kaj mian horloĝon \mathcal{H} haltaditaj ĉe fiksa punkto de la cirkla trajektorio. Do ni uzos la ekvacion (4) pri la ĝenerala Doppler-efekto, en kiu, kvankam la modulo v de la rapido de elektata horloĝo, \mathcal{H}' , estas konstanta, la angulo α ne estas; vidu figuron 2.

Estiĝu $\varphi = 0$ la fiksa angula loko de \mathcal{H} kaj estiĝu ambaŭ horloĝoj ĉe ĉi tiu loko ĉe $\tau = 0$, montrata per \mathcal{H} . Do la angula loko de \mathcal{H}' ĉe momento τ estas $\varphi(\tau) = 2\alpha(\tau) = \omega\tau$, kaj la interspaco inter la du horloĝoj estas $l(\tau) = 2R \sin \alpha(\tau) = 2R \sin(\omega\tau/2)$, mezurata per \mathcal{H} . La ek. (4) estiĝas

$$d\tau' = \frac{\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}}{1 + (R\omega/c) \cos(\omega\tau/2)} d\tau_p. \quad (8)$$



Figuro 2: La horloĝo \mathcal{H} ripozas kaj \mathcal{H}' unuforme cirkle moviĝas.

Mi **vidas** unue foriĝan Doppler-efekton kiu iom-post-iome estiĝas transversa kaj fine alproksimiĝa. La rilato inter la periodoj estos donata per la integralado de la rilato (8) je unu plena turno. Por tio, konsideru ke ĉe momento τ per \mathcal{H} , lumsignalo ekiras de \mathcal{H}' , kaj atingas \mathcal{H} ĉe la posta momento

$$\tau_p := \tau + \frac{l(\tau)}{c} = \tau + \frac{2R}{c} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \quad (9)$$

Diferenciante ĉi tiu ekvacio ni havigas

$$d\tau_p = [1 + (R\omega/c) \cos(\omega\tau/2)] d\tau, \quad (10)$$

kiu simpligas (8): $d\tau' = \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2} d\tau$. Integralante ĝin de 0 ĝis la periodo $\Delta\tau = 2\pi/\omega$ mezurata per \mathcal{H} , ni havigas la rilaton inter la propraj periodoj $\Delta\tau' = \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2} (2\pi/\omega)$. Interesas noti ke integralante (10) ĉe la samaj limoj, ni havigas $\Delta\tau_p = 2\pi/\omega$, esperinde ĉar, ĉe pleno de unu turno, la du horloĝoj estas kunaĵ kaj do $\Delta\tau_p = \Delta\tau$.

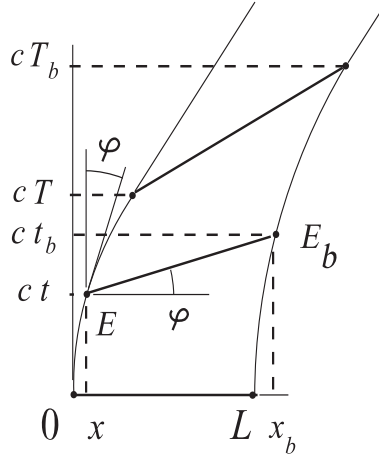
9 Rigida stango

En sekcio 6 ni movis stangon same akcelante ĉiujn iliajn punktojn; konsekvence, la stanga propralongo estis ŝanĝata. Ni nun akcelos la stangon tiel ke ĝi restas rigida.

Estiĝu inercia rilatejo S_0 , kun koordinatoj x kaj t , kaj stango komence ripozanta sur la akso x ; kaj estiĝu horloĝoj a kaj b sinkronaj, fiksaj en la stango ĉe la lokoj 0 kaj L , respektive. Ĉe la momento $t = 0$ la horloĝoj a kaj b registru la propratempojn $\tau = 0$ kaj $\tau_b = 0$, kaj la stango laŭlonge ekmoviĝu tiel ke a moviĝas laŭ $x(t)$. La stanga rigideco trudas ke la movo de b rilatas al la movo de a tiel ke la interspaco L inter a kaj b restas konstanta per ĉiu inercia rilatejo S_v momente ripozanta de a .

Sur la figuro 3 ni havas la eventojn $E = [x, ct]$, ĉe la historio de a , kaj $E_b = [x_b, ct_b]$, ĉe la historio de b ; estiĝu tiuj eventoj samtempaj ĉe la inercia rilatejo S_v . La angulo φ rilatas al la rapido de a laŭ $\tan \varphi(t) = v(t)/c$, en kiu $v(t) := dx(t)/dt$. Ni volas rilatigi la valorojn de x_b kaj t_b al la valoroj de x kaj t . Unue, ni vidas sur la figuro ke $\tan \varphi = c(t_b - t)/(x_b - x)$, do

$$c(t_b - t) = \frac{v(t)}{c}(x_b - x); \quad (11)$$



Figuro 3: Grafikaĵo de la historio de a , maldekstre, kaj b , dekstre. La horloĝoj a kaj b akceliĝas ĝis la altoj cT kaj cT_b , respektive, poste iliaj rapidoj fariĝas konstantaj kaj samaj. La eventoj E kaj E_b estas samtempaj per la rilatejo S_v , kies aksoj faras angulon φ kun la aksoj de S_0 .

poste ni trudas la Lorentzan nevariigecon de la interspaco L , t.e.,

$$(x_b - x)^2 - c^2(t_b - t)^2 = L^2; \quad (12)$$

fine ni havigas de (11) kaj (12) (Nikolić [11])

$$x_b = x + L\gamma, \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (13)$$

$$t_b = t + \frac{L}{c^2}v\gamma. \quad (14)$$

Memoru ke x estas la a horloĝa loko ĉe la momento t , dum ke x_b estas la loko de b ĉe la post-momento t_b per (14).

Ni povas montri ke, en ĉiuj sinsekvaj inerciaj rilatejoj S_v , ĉiuj stangaj punktoj estas same rapidaj. Por tio, ni unue diferencigas (13) kaj (14) kaj havigas

$$dx_b = dx + (L/c^2)\gamma^3 v dv, \quad (15)$$

$$dt_b = dt + (L/c^2)\gamma^3 dv, \quad (16)$$

en kiuj ni uzis $d\gamma = \gamma^3 v dv/c^2$ kaj $d(v\gamma) = \gamma^3 dv$. Poste ni uzas (15) kaj (16) ĉe $v_b(t_b) = dx_b/dt_b$, kaj havigas efektive $v_b(t_b) = v$ (kaj konsekvence $\gamma_b(t_b) = \gamma$). Konvenas emfazi ke ĉi tiu samo de rapidoj de a kaj b okazas per la sinsekvaj inerciaj rilatejoj S_v , kaj ne per la inercia rilatejo S_0 .

Ni montros ke, per la sinsekvaj inerciaj rilatejoj S_v , la horloĝoj a kaj b ne restas sinkronaj, kaj ni kalkulos la dis-sinkronon. Por tio, ni kalkulas la propratempojn τ kaj τ_b registratajn per tiuj horloĝoj ekde la ripozo. Integralante $d\tau = dt/\gamma(t)$ de 0 ĝis t , kaj $d\tau_b = dt_b/\gamma_b(t_b)$ de 0 ĝis la momento t_b ĉe (14), ni havigas

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt}{\gamma}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
\tau_b(t_b) &= \int_0^{t_b} \frac{dt_b}{\gamma_b(t_b)} = \int_0^t \frac{dt}{\gamma} + \frac{L}{c^2} \int_0^v \gamma^2 dv = \tau(t) + \frac{L}{c^2} \int_0^v \frac{dv}{1 - v^2/c^2} \\
&= \tau(t) + \frac{L}{c} \tanh^{-1} \frac{v}{c};
\end{aligned} \tag{18}$$

ĉe la supra kalkulo ni uzis (16) por ŝanĝo de integralada varianto, kaj rilataj limoj, de t_b al t kaj v . Ni vidas do ke, en ĉiu ripoza inercia rilatejo S_v de la rigida stango, la horloĝoj montras dis-sinkronon

$$\tau_b(t_b) - \tau(t) = \frac{L}{c} \tanh^{-1} \frac{v(t)}{c}, \tag{19}$$

en kiu L estas la propra interspaco inter la horloĝoj. La dis-sinkrono (19) estas fore **vidata**, per observanto ĉe vida rekto normala al la stango, kaj ĉe la rapido v rilate al la inercia rilatejo S_0 . La rezulto (19) ĝeneralas tion de Giannoni kaj Grøn [12], kiuj havigis ĝin ĉe la speciala okazo pri konstanta propra akcelo de a , laŭ ni vidos en la sekvanta sekcio.

Interesas noti ke ni povas eviti tiun malsamigitan maljuniĝon de la stang-punktoj, se ni ne trudas la rigidecon dum la akcelo, t.e., se ni fiksas nur la kondiĉojn komencajn (ripozon) kaj finajn (rapidon v). Ja, se iu stang-punkto zigzagas ĉe rapido proksima al la lumrapido, ĝia propratempa intervalo estos tiel malgranda kiel oni volas.

Ni povas ankaŭ montri ke ĉiuj horloĝoj fiksaĵ en la rigida stango havas saman paŝadon, per ĉiu inercia rilatejo S_v . Por tio, ni kalkulas $d\tau = dt/\gamma$ pri la horloĝo a ĉe la momento t , kaj pri la horloĝo b ĉe la momento t_b (samtempa al t per la rilatejo S_v):

$$d\tau(t) = \frac{dt}{\gamma}, \quad d\tau_b(t_b) = \frac{dt}{\gamma_b(t_b)}; \tag{20}$$

ĉar $\gamma_b(t_b) = \gamma$, tial ni notas ke efektive $d\tau_b(t_b) = d\tau(t)$. Konvenas emfazi ke tiu paŝada sameco ĉe samaj momentoj estas **vidata** apenaŭ per observanto ĉe la sinsekvaj rilatejoj S_v , kaj ne ĉe la komenca rilatejo S_0 . Ja, ĉe la inercia rilatejo S_0 oni **vidas** la horloĝon b pulsi ĉe la momento t_b kiel oni **vidis** la horloĝon a pulsi ĉe la momento t , kiu estas iam antaŭa ($t < t_b$).

Ŝajnas paradoksa ke ĉiuj horloĝoj fiksaĵ en la moviĝanta rigida stango havas *saman paŝadon* per ĉiu rilatejo S_v , kaj tamen iom-post-iome dis-sinkroniĝas per la sinsekvaj S_v . La paradokso estas solvata se ni memoras ke kvankam ĉiu S_v estas inercia, rilatejo kiu akompanas la akcelan movon de la rigida stango ne estas inercia. Notu ke la samtempa rekto $E - E_b$, sur figuro 3, ŝanĝas la klinon iom-post-iome.

Nun ni supozu ke ĉe momento T la horloĝo a maldaŭrigas sian akcelon, kaj tenas konstanta la rapidon $V := v(T)$. Iom-post-iome la horloĝoj antaŭaj a havigos la konstantan rapidon V ĝis kiam la horloĝo b estos ankaŭ ĉe la rapido V , ĉe la momento T_b . Do ĉiu rigida stanga peco inter a kaj b estos ĉe la konstanta rapido V mezurata per la inercia rilatejo S_0 , ĉe la momento T_b . Ni povas nun kalkuli, ĉe la momento T_b , la dis-sinkronon $\tau_b(T_b) - \tau(T_b)$ per la rilatejo S_0 , inter la horloĝoj a kaj b : ni unue kalkulas

$$\tau(T_b) = \int_0^{T_b} \frac{dt}{\gamma} = \left(\int_0^T + \int_T^{T_b} \right) \frac{dt}{\gamma} = \tau(T) + \frac{T_b - T}{\gamma(T)} = \tau(T) + \frac{LV}{c^2}, \tag{21}$$

en kiu, per (14), oni uzis $(T_b - T)/\gamma(T) = LV/c^2$. Konsidere (19) kun $t_b = T_b$ kaj $t = T$, kaj (21), ni fine havigas

$$\tau_b(T_b) - \tau(T_b) = \frac{L}{c} \tanh^{-1}(V/c) - \frac{LV}{c^2}. \quad (22)$$

Ĉi tiu estas la dis-sinkrono per la inercia rilatejo S_0 komence ripoza de la stango. Do observanto sufiĉe malproksime de la stango, ĉe direkcia normala al ĝi (kiel en sekcio 6), **vidas** dis-sinkronon laŭ (22). Ĝi dependas nur de la valoro V , kaj ne de la maniero kiel tiu rapido estas havigita. Notu ke se la horloĝo a daŭriĝas ĉe konstanta rapido post T_b , tiu dis-sinkrono daŭriĝas. Ĉar $\tanh^{-1}(V/c) = V/c + (V/c)^3/3 + \dots$, tial ni vidas que la dis-sinkrono (22) inter la normohorloĝoj estas ĉe ordo $LV^3/3c^4$, tre malgranda kaj malsigna ol la familiara $-LV/c^2$ trovata inter koordinataj horloĝoj ĉe la Lorentzaj transformoj (lasta termo ĉe (22)).

10 Konstanta akcelo

En la antaŭa sekcio ni studis la movon de stango kiu restis rigida ĉe arbitra akcelo. Ni nun specialigas, elektante $x(t)$ tiel ke la horloĝo a havigas konstantan propran akcelon [8, paĝo 22], [13, paĝo 73], [5, paĝo 49], [12] kaj [11].

La propra akcelo A de korpo estas difinata, per ĉiu inercia rilatejo S_v momente ripozanta de la korpo, kiel $A := d^2x_v/dt_v^2$. Ĉe tiu akcelo la korpo havas diferencian mov-ekvacion $du/dt = A$ en kiu $u := v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, estante $v := dx/dt$ la korpa rapido mezurata per la inercia rilatejo S_0 , kiu koordinatoj estas x kaj t . La ĝenerala solvo por $A = \text{konst}$ estas

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2}{A} \left(\sqrt{1 + [A(t - t_0) + u_0]^2/c^2} - \gamma_0 \right), \quad (23)$$

$$\gamma_0 := \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad u_0 := v_0\gamma_0, \quad (24)$$

en kiuj t_0 markas la akcelan komencon, $x_0 := x(t_0)$ estas la komenca loko, kaj $v_0 := v(t_0)$ estas la komenca rapido. La rapido estas

$$v(t) = \frac{A(t - t_0) + u_0}{\sqrt{1 + [A(t - t_0) + u_0]^2/c^2}}, \quad (25)$$

kaj la propratempo inter la akcela komenco ĉe t_0 kaj la momento t estas havigata per la integralado de $d\tau = dt/\gamma(t) = dt\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}$,

$$\tau(t) = \frac{c}{A} \sinh^{-1} \left(\frac{A(t - t_0) + u_0}{c} \right) - \frac{c}{A} \sinh^{-1} \left(\frac{u_0}{c} \right). \quad (26)$$

La horloĝo a de la antaŭa sekcio havas $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, kaj $t_0 = 0$. La ekvacioj (23) – (26) simpliĝas ĉe

$$x = \frac{c^2}{A} \left(\sqrt{1 + A^2 t^2/c^2} - 1 \right) = \frac{2c^2}{A} \sinh^2 \left(\frac{A\tau}{2c} \right), \quad (27)$$

$$v = \frac{At}{\sqrt{1 + A^2 t^2 / c^2}} = c \tanh\left(\frac{A\tau}{c}\right), \quad (28)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + A^2 t^2 / c^2} = \cosh\left(\frac{A\tau}{c}\right), \quad u = At = c \sinh\left(\frac{A\tau}{c}\right), \quad (29)$$

$$\tau = \frac{c}{A} \sinh^{-1}\left(\frac{At}{c}\right). \quad (30)$$

Ni determinas nun la movon de la horloĝo b , ankaŭ fiksa en la stango, ĉe la komenca loko $x = L$. Uzante la antaŭajn ekvaciojn ĉe la rigidecaj kondiĉoj (13) kaj (14) ni havigas

$$x_b = L + \frac{c^2}{B} \left(\sqrt{1 + B^2 t_b^2 / c^2} - 1 \right) = L + \frac{2c^2}{B} \sinh^2\left(\frac{B\tau_b}{2c}\right), \quad (31)$$

$$t_b = \frac{A}{B} t, \quad B := \frac{A}{1 + AL/c^2}. \quad (32)$$

Komparante (31) kaj (27) ni vidas ke la horloĝo b ekiras de la loko L kiam $t_b = 0$ kaj havas propran akcelon B ankaŭ konstanta. Ni notas ke, se la horloĝo b estus ĉe la komenca loko $-c^2/A$, tial ĝia akcelo estus infinita kaj ĝia rapido estus c ; do ni ne povas senfine poste plivastigi la stangon. Kaj (32), skribata kiel $Bt_b = At$, permesas tre klaran Newtonan interpreton: se la horloĝo b restas ĉe konstanta akcelo B dum la intertempo t_b , ĝi havigos saman rapidon kiel la horloĝo a , se ĉi tiu restas ĉe konstanta akcelo A dum la intertempo t .

Evidente, ĉiu rezulto havigata en sekcio 9 estas valida ĉe ĉi tiu speciala okazo. Sed ni nun havas unu novan rezulton. Ĉe iu momento dum la rigida stango akceliĝas, la registroj de la horloĝoj a kaj b vidataj per S_0 estas donataj per (30), kun B anstataŭ A por la kalkulo de τ_b .

11 Konkludoj

Ni vidis ke la relativeca tempo estas malsama ol la Newtona: la fluo de la relativeca (proprate tempo) dependas de la rapido de la korpo (horloĝo) kiu mezuras ĝin, kontraŭe la Newtona ne dependas. Laŭ la relativeco, ju pli granda la horloĝa rapido, des malpli rapida la antaŭeniro de ĝia registro.

Do, ni vidis en subsekcio 3.4 ke, kontraŭe la Newtona antaŭvido, eblas Doppler-efekton de ruĝa delokigo eĉ se la interspaco fonto-observanto malgrandiĝas. Ni ankaŭ vidis, en sekcio 4, ke la tre detala analizo de Darwin montris ke ni ne bezonas uzi la ĝeneral-relativecon por solvi la ĝemel-paradokson. Estis same grava noti, en sekcio 7, ke horloĝoj fiksaĵ ĉe la bordo de rotacia disko ne povas esti ĉiue sinkronaj laŭ Einstein.

En sekcio 9, ni vidis ke ne estas triviala, la konstruo de moviĝanta inercia rilatejo ekde iu alia \mathcal{S} senmova. Fakte, se ni same akcelas ĉiujn punktojn de \mathcal{S} (kiel en sekcio 6), ni perdas ĝian rigidecon, kaj ne havigas la spacan malplivastiĝon nek la dis-sinkronon ordinaraĵn de la special-relativeco. Aliaflanke, se ni akcelas \mathcal{S} trudante rigidecon, ni havigas la Lorentzan malplivastiĝon, sed ankoraŭ ne ekhavis la volatan dis-sinkronon. Por fine havigi inercia rilatejo, resinkronigo de moviĝantaj horloĝoj estas bezona.

Fine, en sekcio 10 ni vidis ke se iu punkto de la rigida stango havas konstantan propran akcelon, do ĉiuj aliaj punktoj ankaŭ havos ĝin, sed ĉe malsamaj valoroj; tiuj ie antaŭaj ĉe la movo estas la malpli akcelataj, kaj la stango ne povas tro ie poste plivastiĝi.

Ĉe inercia rilatejo de la special-relativeco, la valoro de la tempa koordinato estas trudata per horloĝoj sinkronaj laŭ Einstein. Tamen, ni povas uzi ankaŭ ne-inerciajn rilatejojn, en kiuj la tempa koordinato estas trudata per mezuraparatoj kies paŝado estas malsama ol tiu de la

normohorloĝoj de la special-relativeco. Tio estas temo por nia estonta artikolo, *La relativeca tempo - II*.

12 Gratuloj

F.M. Paiva kore dankas al CBPF por la komputila helpo. A.F.F. Teixeira kore dankas al Reta Vortaro [14].

Citaĵoj

- [1] Bureau International des Poids et Mesures kaj Organisation intergouvernementale de la Convention du Mètre, *Le système international d'unités (SI) 7^e édition* 1998, Édité par le BIPM, France (<http://www.bipm.fr/utills/en/pdf/brochure-si.pdf> ; <http://www.bipm.fr/en/home>).
- [2] H.J. Hay, J.P. Schiffer, T.E. Cranshaw, P.A. Egelstaff, *Measurement of the red shift in an accelerated system using the Mössbauer effect in Fe^{57}* , Phys. Rev. Letters **4** (1960) 165-166.
- [3] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman (1973).
- [4] R.B. Salgado, *Visualizing proper-time in special relativity*, <http://www.arxiv.org/abs/physics/0505134> .
- [5] W. Rindler, *Essential relativity, 2nd ed.*, Springer-Verlag (1977).
- [6] R.M. Eisberg, *Fundamentals of modern physics*, John Wiley & Sons (1961).
- [7] J. Bailey *et al.*, *Measurements of relativistic time dilation for positive and negative muons in a circular orbit*, Nature **268** (1977) 301-305.
- [8] L. Landau, L. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Butterworth-Heinemann (1996).
- [9] H. Bondi, *Some special solutions of the Einstein equations*, in *Lectures on general relativity, vol 1*, Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, eds. S. Deser and K.W. Ford; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1965).
- [10] C. Darwin, *The clock paradox in relativity*, Nature **180** (1957) 976-977.
- [11] H. Nikolić, *Relativistic contraction of an accelerated rod*, Am. J. Phys. **67** (1999) 1007-1012, <http://www.arxiv.org/abs/physics/9810017> .
- [12] C. Giannoni, Ø. Grøn, *Rigidly connected accelerated clocks*, Am. J. Phys. **47**,(1979) 431-435.
- [13] C. Møller, *The theory of relativity, 2nd ed*, Oxford U.P. (1972).
- [14] <http://www.uni-leipzig.de/esperanto/voko/revo/>.